Первая краевая задача для уравнения Лапласа в неограниченных областях
The first boundary value problem for the Laplace equation in unbounded domains

Бекларян А.Л.

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия

e-mail: `beklaryan@hotmail.com`

В работе рассматривается первая краевая задача для эллиптических систем, заданных в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, решения которых удовлетворяют условию конечности интеграла Дирихле, называемого также интегралом энергии

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Основные понятия

Пусть Ω – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Как это принято, через $W^1_{2,\,loc}(\Omega)$ обозначим пространство функций локально являющихся соболевскими, т.е.

$$W^1_{2,\,loc}(\Omega) = \{f : f \in W^1_2(\Omega \cap B_\rho(x))\, \forall\, \rho > 0\,,\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}\,,$$

где B^x_ρ – открытый шар с центром в точке x и радиусом ρ. Будем обозначать через $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,loc}(\Omega)$ множество функций из $W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^n)$, которое получается замыканием $C^\infty_0(\Omega)$ в системе полунорм $\|u\|_{W^1_2(\mathcal{K})}$, где $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ – всевозможные компакты.

Пусть $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\mathcal{K} \subset \omega$ – компакт. Обозначим за $\Phi_\varphi(\mathcal{K}, \omega)$ множество $\Phi_\varphi(\mathcal{K}, \omega) = \{\psi \in C^\infty_0(\omega) : \psi = \varphi$ в окрестности $\mathcal{K}\}$, при этом равенство $\psi = \varphi$ мы понимаем как то, что $(\psi - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$, т.е. $\mu(x)(\psi(x)-\varphi(x))\in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}(\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{K})$, где $\mu\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – любая срезывающая функция.

Определим емкость ([3] с.293):

$$\operatorname{cap}_{\varphi}(\mathcal{K},\omega)=\inf_{\psi\in\Phi_{\varphi}(\mathcal{K},\omega)}\int\limits_{\omega}|\nabla\psi|^2dx\,.$$

Емкость произвольного замкнутого в $\mathbb{R}^n$ множества $E\subset\omega$ определяется формулой $\operatorname{cap}_{\varphi}(E,\omega)=\sup\limits_{\mathcal{K}\subset E}\operatorname{cap}_{\varphi}(\mathcal{K},\omega)$. Если $\omega=\mathbb{R}^n$, то вместо $\operatorname{cap}_{\varphi}(E,\mathbb{R}^n)$ будем писать $\operatorname{cap}_{\varphi}(E)$.

Постановка задачи

Решением задачи Дирихле

$$\begin{cases}\triangle u &= 0 \ \text{ в } \Omega\\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi,\end{cases}\tag{1}$$

где $\varphi\in W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^n)$, называется функция $u\in W^1_{2,\,loc}(\Omega)$ такая что:

1) $(u-\varphi)\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\,loc}(\Omega)$, т.е. $\mu(x)(u(x)-\varphi(x))\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}(\Omega)$ для любой функции $\mu\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) функция $u(x)$ имеет ограниченный интеграл Дирихле

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dx<\infty\,.$$

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $cap_{\varphi-c}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)<\infty$ для некоторой константы $c\in\mathbb{R}^n$. Тогда задача (1) имеет решение.*

Теорема 2. *Пусть задача (1) имеет решение и верно, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}|\nabla\varphi|^2dx<\infty\,.$$

Тогда существует такая константа $c\in\mathbb{R}^n$, что $cap_{\varphi-c}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)<\infty$.

Список литературы

[1] Коньков А.А., “О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях”, *Мат. сборник*, т.184, No. 12, с.23-52, (1993).

[2] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: Наука, (1964).

[3] Мазья В.Г., *Пространства С.Л.Соболева*, Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, (1985).

[4] Михлин С.Г., *Линейные уравнения в частных производных*, М.: Высшая школа, (1977).