

# Метод анализа иерархий

16+



**Шевченко Денис Вячеславович**

**e-mail: DV@ieml.ru**

**В vk.com/dv1973**

Материалы лекции размещены по адресу:

**[www.ieml-math.narod.ru/lect/MPUR\\_MAI.pdf](http://www.ieml-math.narod.ru/lect/MPUR_MAI.pdf)**

# Метод анализа иерархий

## История и суть

В 1970 г. Томас Саати (США) разработал метод анализа иерархий (Analytic hierarchy process).

Относится к классу критериальных методов.

Получил широкое распространение и до сих пор активно используется в управленческой практике.

Приводит ЛПР не к «правильному» решению, а к варианту, наилучшим образом согласующемуся с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению.

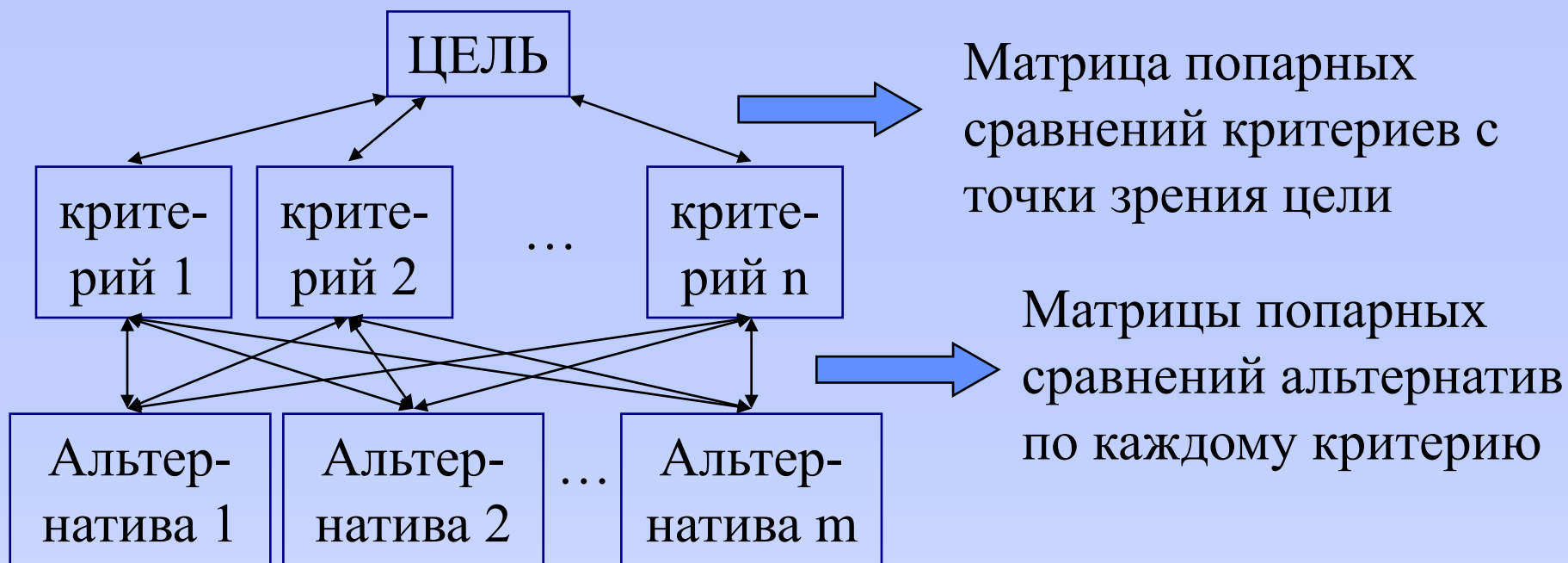
# Метод анализа иерархий

## Этапы метода

1. Выделение проблемы. Определение цели.
2. Выделение основных критериев и альтернатив.
3. Построение иерархии: дерево от цели через критерии к альтернативам.
4. Построение матрицы попарных сравнений критериев по цели и альтернатив по критериям.
5. Применение методики анализа полученных матриц.
6. Определение весов альтернатив по системе иерархии.

# Метод анализа иерархий

## Дерево критериев и альтернатив



В практике встречаются системы выбора решения с большим уровнем иерархий (4, 5, ...)

# Метод анализа иерархий

## Пример. Выбор рабочей квартиры

1. Цель: квартира для временного проживания сотрудников при частых командировках.

2. Основные критерии:

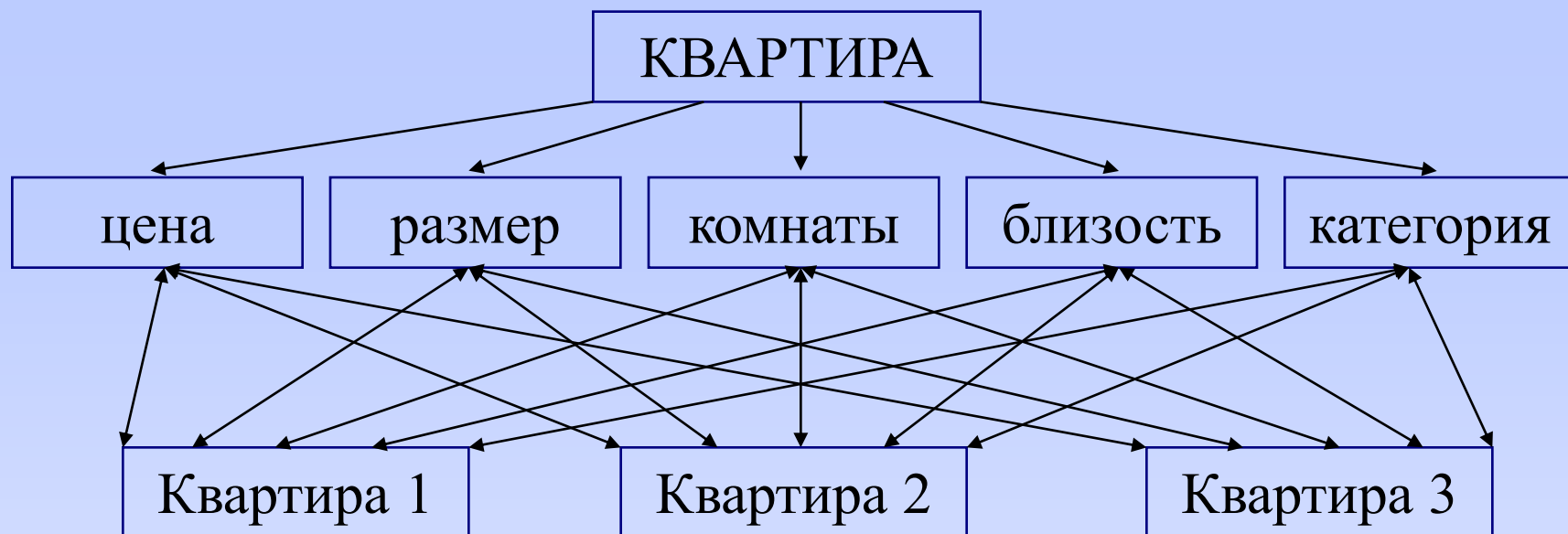
- цена;
- размер;
- количество комнат;
- близость к работе;
- категория дома.

Основные альтернативы (по объявлениям):

- Квартира 1
- Квартира 2
- Квартира 3

# Метод анализа иерархий

## 3. Построение дерева альтернатив



# Метод анализа иерархий

## 4. Построение матрицы попарных сравнений

### 4.1.1. Сравнение критериев.

Исходно попарное сравнение по качественной шкале, с последующим преобразованием в баллы:

равно, безразлично	= 1
немного лучше (хуже)	= 3 (1/3)
лучше (хуже)	= 5 (1/5)
значительно лучше (хуже)	= 7 (1/7)
принципиально лучше (хуже)	= 9 (1/9)

При промежуточном мнении используются промежуточные баллы 2, 4, 6, 8.

# Метод анализа иерархий

## 4. Построение матрицы попарных сравнений

### 4.2.1. Составляем матрицу

$a_{ij}$  – отношение критерия  $i$  к критерию  $j$ .

$$a_{ji} = 1/a_{ij} \quad a_{ii} = 1$$

	цена	размер	комнаты	близость	категория
цена	1	3	1	1/2	5
размер	1/3	1	1/4	1/7	2
комнаты	1	4	1	1	6
близость	2	7	1	1	8
категория	1/5	1/2	1/6	1/8	1



# Метод анализа иерархий

## 4. Построение матрицы попарных сравнений

### 4.2. Сравнение альтернатив по критериям.

Составляем аналогичные матрицы сравнения вариантов (альтернатив) по каждому критерию:

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	4	1/2
Квартира 2	1/4	1	1/5
Квартира 3	2	5	1

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/2	3
Квартира 2	2	1	4
Квартира 3	1/3	1/4	1

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1	2
Квартира 2	1	1	3
Квартира 3	1/2	1/3	1

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/3	4
Квартира 2	3	1	5
Квартира 3	1/4	1/5	1

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	2	1/5
Квартира 2	1/2	1	1/6
Квартира 3	5	6	1

# Метод анализа иерархий

## 5. Методика анализа матриц

5.1.1. Находим сумму элементов каждого столбца.

$$S_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj}$$

5.1.2. Делим все элементы матрицы на сумму элементов соответствующего столбца:

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}}{S_j}$$

Данные два действия называются нормировкой матрицы.

# Метод анализа иерархий

$a_{ij}$	цена	размер	комнаты	близость	категория
цена	1	3	1	$1/2=0,5$	5
размер	$1/3=0,333$	1	$1/4=0,25$	$1/7=0,143$	2
комнаты	1	4	1	1	6
близость	2	7	1	1	8
категория	$1/5=0,2$	$1/2=0,2$	$1/6=0,167$	$1/8=0,125$	1
<b>СУММА</b>	<b>4,533</b>	<b>15,2</b>	<b>3,417</b>	<b>2,768</b>	<b>22</b>

$A_{ij}$	цена	размер	комнаты	близость	категория
цена	$1/4,533$	$3/15,2$	$1/3,417$	$0,5/2,768$	$5/22$
размер	$0,333/4,533$	$1/15,2$	$0,25/3,417$	$0,143/2,768$	$2/22$
комнаты	$1/4,533$	$4/15,2$	$1/3,417$	$1/2,768$	$6/22$
близость	$2/4,533$	$7/15,2$	$1/3,417$	$1/2,768$	$8/22$
категория	$0,2/4,533$	$0,2/15,2$	$0,167/3,417$	$0,125/2,768$	$1/22$

# Метод анализа иерархий

5.1.3. Находим среднее значение для каждой строки:

$A_{ij}$	цена	размер	комнаты	близость	категория	СРЗНАЧ
цена	<b>0,221</b>	<b>0,197</b>	<b>0,293</b>	<b>0,181</b>	<b>0,227</b>	<b>0,224</b>
размер	<b>0,073</b>	<b>0,066</b>	<b>0,073</b>	<b>0,052</b>	<b>0,091</b>	<b>0,071</b>
комнаты	<b>0,221</b>	<b>0,263</b>	<b>0,293</b>	<b>0,361</b>	<b>0,273</b>	<b>0,282</b>
близость	<b>0,441</b>	<b>0,461</b>	<b>0,293</b>	<b>0,361</b>	<b>0,364</b>	<b>0,384</b>
категория	<b>0,044</b>	<b>0,013</b>	<b>0,049</b>	<b>0,045</b>	<b>0,045</b>	<b>0,039</b>

5.1.4. Полученный столбец задает «веса» критериев с точки зрения поставленной цели.

Этот столбец называют **весовым столбцом критериев по цели.**

# Метод анализа иерархий

## 5.1.5. Промежуточный вывод

	Вес в долях	Вес в процентах
цена	<b>0,224</b>	<b>22,4%</b>
размер	<b>0,071</b>	<b>7,1%</b>
комнаты	<b>0,282</b>	<b>28,2%</b>
близость	<b>0,384</b>	<b>38,4%</b>
категория	<b>0,039</b>	<b>3,9%</b>

С точки зрения удовлетворения нашей цели наиболее весомым является близость квартиры к месту работы (38,4%), далее следует количество комнат (28,2%), потом идет цена (22,4%). Размер и категория квартиры имеют наименьшие весовые коэффициенты, в сумме составляющие всего 11%.

# Метод анализа иерархий

5.2.–5.6. Повторяем действия 5.1.1–5.1.5 для матриц попарного сравнения по критериям.

В итоге получаем столбцы (векторы) весовых коэффициентов объектов сравнения с точки зрения соответствия отдельным критериям.

# Метод анализа иерархий

## 5.2. Критерий «Цена»

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	4	$1/2=0,5$
Квартира 2	$1/4=0,25$	1	$1/5=0,2$
Квартира 3	2	5	1
<b>СУММА</b>	<b>3,25</b>	<b>10</b>	<b>1,7</b>

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	$1/3,25$	$4/10$	$0,5/1,7$
Квартира 2	$0,25/3,25$	$1/10$	$0,2/1,7$
Квартира 3	$2/3,25$	$5/10$	$1/1,7$

цена	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,308	0,400	0,294	<b>0,334</b>
Квартира 2	0,077	0,100	0,118	<b>0,098</b>
Квартира 3	0,615	0,500	0,588	<b>0,568</b>

цена	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	<b>0,334</b>	<b>33,4%</b>
Квартира 2	<b>0,098</b>	<b>9,8%</b>
Квартира 3	<b>0,568</b>	<b>56,8%</b>

Получили вектор весов объектов по критерию «цена».

По критерию «цена» наиболее весомым (лучшим, интересным, симпатичным, ...) является Квартира 3 (56,8%), далее следует Квартира 1 (33,4%), и наименее интересна Квартира 2 (9,8%).

Если бы мы выбирали объект только по цене, то выбор уже сейчас был бы очевидным.

# Метод анализа иерархий

## 5.3. Критерий «Размер»

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	$1/2=0.5$	3
Квартира 2	2	1	4
Квартира 3	$1/3=0.33$	$1/4=0.25$	1
<b>СУММА</b>	<b>3,33</b>	<b>1,75</b>	<b>8</b>

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	$1/3,33$	$0,5/1,75$	$3/8$
Квартира 2	$2/3,33$	$1/1,75$	$4/8$
Квартира 3	$0,33/3,33$	$0,25/1,75$	$1/8$

размер	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,300	0,286	0,375	<b>0,320</b>
Квартира 2	0,600	0,571	0,500	<b>0,557</b>
Квартира 3	0,100	0,143	0,125	<b>0,123</b>

размер	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	<b>0,320</b>	<b>32%</b>
Квартира 2	<b>0,557</b>	<b>55,7%</b>
Квартира 3	<b>0,123</b>	<b>12,3%</b>

Получили вектор весов объектов по критерию «размер».

По критерию «размер» наиболее весомым является Квартира 2 (55,7%), далее следует Квартира 1 (32%), и наименее интересна Квартира 3 (12,3%).



# Метод анализа иерархий

## 5.4. Критерий «Комнаты»

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1	2
Квартира 2	1	1	3
Квартира 3	1/2	1/3	1
<b>СУММА</b>	<b>2,5</b>	<b>2,33</b>	<b>6</b>

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/2,5	1/2,33	2/6
Квартира 2	1/2,5	1/2,33	3/6
Квартира 3	0,5/2,5	0,33/2,33	1/6

КОМНАТЫ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,400	0,429	0,333	<b>0,387</b>
Квартира 2	0,400	0,429	0,500	<b>0,443</b>
Квартира 3	0,200	0,143	0,167	<b>0,170</b>

КОМНАТЫ	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	<b>0,387</b>	<b>38,7%</b>
Квартира 2	<b>0,443</b>	<b>44,3%</b>
Квартира 3	<b>0,170</b>	<b>17%</b>

Получили вектор весов объектов по критерию «Комнаты».

По критерию «комнаты» наиболее весомым является Квартира 2 (44,3%), далее следует Квартира 1 (38,7%), и наименее интересна Квартира 3 (17%).

# Метод анализа иерархий

## 5.5. Критерий «Близость»

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	1/3	4
Квартира 2	3	1	5
Квартира 3	1/4	1/5	1
<b>СУММА</b>	<b>4.25</b>	<b>1.53</b>	<b>10</b>

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/4,25	0,33/1,53	4/10
Квартира 2	3/4,25	1/1,53	5/10
Квартира 3	0,25/4,25	0,2/1,53	1/10

БЛИЗОСТЬ	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,235	0,217	0,400	<b>0,284</b>
Квартира 2	0,706	0,652	0,500	<b>0,619</b>
Квартира 3	0,059	0,130	0,100	<b>0,096</b>

БЛИЗОСТЬ	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	<b>0,284</b>	<b>28,4%</b>
Квартира 2	<b>0,619</b>	<b>61,9%</b>
Квартира 3	<b>0,096</b>	<b>9,6%</b>

Получили вектор весов объектов по критерию «близость».

По критерию «близость» наиболее весомым является Квартира 2 (61,9%), далее следует Квартира 1 (28,4%), и наименее интересна Квартира 3 (9,6%).

# Метод анализа иерархий

## 5.6. Критерий «Категория»

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1	2	1/5
Квартира 2	1/2	1	1/6
Квартира 3	5	6	1
<b>СУММА</b>	<b>6,5</b>	<b>9</b>	<b>1,37</b>

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3
Квартира 1	1/6,5	2/9	0,2/1,37
Квартира 2	0,5/6,5	1/9	0,17/1,37
Квартира 3	5/6,5	6/9	1/1,37

категория	Квартира 1	Квартира 2	Квартира 3	СРЗНАЧ
Квартира 1	0,154	0,222	0,146	<b>0,174</b>
Квартира 2	0,077	0,111	0,122	<b>0,103</b>
Квартира 3	0,769	0,667	0,732	<b>0,723</b>

категория	Вес в долях	Вес в процентах
Квартира 1	<b>0,174</b>	<b>17,4%</b>
Квартира 2	<b>0,103</b>	<b>10,3%</b>
Квартира 3	<b>0,723</b>	<b>72,3%</b>

Получили вектор весов объектов по критерию «категория».

По критерию «категория» Квартира 3 (72,3%) существенно перевешивает и Квартиру 1 (17,4%), и Квартиру 2 (10,3%).

# Метод анализа иерархий

## 6. Определение весов альтернатив

В результате пункта 5 сформированы:

вектор весов критериев;

матрица весов альтернатив по каждому критерию (состоящая из полученных весовых столбцов).

	Вес в долях
цена	<b>0,224</b>
размер	<b>0,071</b>
комнаты	<b>0,282</b>
близость	<b>0,384</b>
категория	<b>0,039</b>

	цена	размер	комнаты	близость	категория
Квартира 1	<b>0,334</b>	<b>0,320</b>	<b>0,387</b>	<b>0,284</b>	<b>0,174</b>
Квартира 2	<b>0,098</b>	<b>0,557</b>	<b>0,443</b>	<b>0,619</b>	<b>0,103</b>
Квартира 3	<b>0,568</b>	<b>0,123</b>	<b>0,170</b>	<b>0,096</b>	<b>0,723</b>

# Метод анализа иерархий

## 6. Определение весов альтернатив

Умножая полученную матрицу на столбец по правилу строка на столбец (матрично), получаем веса альтернатив с точки зрения достижения цели:

$$\begin{pmatrix} 0,334 & 0,320 & 0,387 & 0,284 & 0,174 \\ 0,098 & 0,557 & 0,443 & 0,619 & 0,103 \\ 0,568 & 0,123 & 0,170 & 0,096 & 0,723 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,224 \\ 0,071 \\ 0,282 \\ 0,384 \\ 0,039 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,323 \\ 0,428 \\ 0,249 \end{pmatrix}$$

# Метод анализа иерархий

## 6. Определение весов альтернатив

В результате получаем веса альтернатив с точки зрения достижения поставленной цели:

	<b>Вес в долях</b>	<b>Вес в %</b>
<b>Квартира 1</b>	<b>0,323</b>	<b>32,3%</b>
<b>Квартира 2</b>	<b>0,428</b>	<b>42,8%</b>
<b>Квартира 3</b>	<b>0,249</b>	<b>24,9%</b>

Таким образом, Квартира 2 является наиболее привлекательной для данной цели.

Если же мы будем приобретать две квартиры, то это будут квартиры 2 и 3.

# Метод анализа иерархий

## Замечание о матрицах весов

	Вес в долях
цена	0,224
размер	0,071
комнаты	0,282
близость	0,384
категория	0,039

	цена	раз- мер	ком- наты	бли- зость	кате- гория
Квартира 1	0,334	0,320	0,387	0,284	0,174
Квартира 2	0,098	0,557	0,443	0,619	0,103
Квартира 3	0,568	0,123	0,170	0,096	0,723

Полученные в п.5 матрицы часто имеют собственную ценность.

Например, в этом случае, вектор весов критериев может использоваться многократно для разных городов и разных годов. Кроме того, из него можно сделать вывод о малой важности критериев «размер» и «категория» и исключения их из рассмотрения.

В других случаях неоднократно можно использовать матрицу весов альтернатив по критериям.

# Метод анализа иерархий

## Замечание об автоматизации вычислений

Все описанные в данной лекции вычисления легко реализовать в MS Excel.

1. Этап заполнения матрицы (жирным показаны заполняемые клетки, остальные вычисляются по формулам):

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	<b>1</b>	4	0.25	5
3	Критерий2	=1/C2	<b>1</b>	2	3
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	<b>1</b>	8
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	<b>1</b>

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	<b>1</b>	4	1/4	5
3	Критерий2	1/4	<b>1</b>	2	3
4	Критерий3	4	1/2	<b>1</b>	8
5	Критерий4	1/5	1/3	1/8	<b>1</b>

Результат  
вычислений.



# Метод анализа иерархий

## 2. Этап поиска суммы и деления на нее:

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>0.25</b>	<b>5</b>
3	Критерий2	=1/C2	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	<b>1</b>	<b>8</b>
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	<b>1</b>
6	<b>СУММА</b>	<b>=СУММ(B2:B5)</b>	<b>=СУММ(C2:C5)</b>	<b>=СУММ(D2:D5)</b>	<b>=СУММ(E2:E5)</b>
7					
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
9	Критерий1	=B2/B\$6	=C2/C\$6	=D2/D\$6	=E2/E\$6
10	Критерий2	=B3/B\$6	=C3/C\$6	=D3/D\$6	=E3/E\$6
11	Критерий3	=B4/B\$6	=C4/C\$6	=D4/D\$6	=E4/E\$6
12	Критерий4	=B5/B\$6	=C5/C\$6	=D5/D\$6	=E5/E\$6

Будьте осторожнее с выбором абсолютных и относительных ссылок!

Результат вычислений:

	A	B	C	D	E
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
2	Критерий1	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>1/4</b>	<b>5</b>
3	Критерий2	1/4	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
4	Критерий3	4	1/2	<b>1</b>	<b>8</b>
5	Критерий4	1/5	1/3	1/8	<b>1</b>
6	<b>СУММА</b>	<b>5.450</b>	<b>5.833</b>	<b>3.375</b>	<b>17.000</b>
7					
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4
9	Критерий1	0.18	0.69	0.07	0.29
10	Критерий2	0.05	0.17	0.59	0.18
11	Критерий3	0.73	0.09	0.30	0.47
12	Критерий4	0.04	0.06	0.04	0.06

# Метод анализа иерархий

## 3. Этап определения среднего значения в строке (весавого столбца):

	A	B	C	D	E	F
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	
2	Критерий1	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>0.25</b>	<b>5</b>	
3	Критерий2	=1/C2	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	
4	Критерий3	=1/D2	=1/D3	<b>1</b>	<b>8</b>	
5	Критерий4	=1/E2	=1/E3	=1/E4	<b>1</b>	
6	<b>СУММА</b>	<b>=СУММ(B2:B5)</b>	<b>=СУММ(C2:C5)</b>	<b>=СУММ(D2:D5)</b>	<b>=СУММ(E2:E5)</b>	
7						
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	СРЗНАЧ
9	Критерий1	=B2/B\$6	=C2/C\$6	=D2/D\$6	=E2/E\$6	<b>=СРЗНАЧ(B9:E9)</b>
10	Критерий2	=B3/B\$6	=C3/C\$6	=D3/D\$6	=E3/E\$6	<b>=СРЗНАЧ(B10:E10)</b>
11	Критерий3	=B4/B\$6	=C4/C\$6	=D4/D\$6	=E4/E\$6	<b>=СРЗНАЧ(B11:E11)</b>
12	Критерий4	=B5/B\$6	=C5/C\$6	=D5/D\$6	=E5/E\$6	<b>=СРЗНАЧ(B12:E12)</b>

Результат  
вычислений:

	A	B	C	D	E	F
1		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	
2	Критерий1	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>1/4</b>	<b>5</b>	
3	Критерий2	1/4	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	
4	Критерий3	4	1/2	<b>1</b>	<b>8</b>	
5	Критерий4	1/5	1/3	1/8	<b>1</b>	
6	<b>СУММА</b>	<b>5.450</b>	<b>5.833</b>	<b>3.375</b>	<b>17.000</b>	
7						
8		Критерий1	Критерий2	Критерий3	Критерий4	СРЗНАЧ
9	Критерий1	0.18	0.69	0.07	0.29	<b>0.309</b>
10	Критерий2	0.05	0.17	0.59	0.18	<b>0.247</b>
11	Критерий3	0.73	0.09	0.30	0.47	<b>0.397</b>
12	Критерий4	0.04	0.06	0.04	0.06	<b>0.047</b>

# Метод анализа иерархий

## 4. Этап умножения матриц

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
13									
14									
15							0.224		
16	0.334	0.32	0.387	0.284	0.174		0.071		=МУМНОЖ(A16:E18;G15:G19)
17	0.098	0.557	0.443	0.619	0.103		0.282		=МУМНОЖ(A16:E18;G15:G19)
18	0.568	0.123	0.17	0.096	0.723		0.384		=МУМНОЖ(A16:E18;G15:G19)
19							0.039		

Не забудьте ввести формулу как формулу массива. После ввода надо выделить диапазон размещения результата, начиная с ячейки, содержащей формулу. Нажмите клавишу F2, а затем нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Результат  
вычислений:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
13									
14									
15							0.224		
16	0.334	0.320	0.387	0.284	0.174		0.071		0.322512
17	0.098	0.557	0.443	0.619	0.103		0.282		0.428138
18	0.568	0.123	0.170	0.096	0.723		0.384		0.248966
19							0.039		

# Метод анализа иерархий

## Замечание о листах Excel

Рекомендуется:

1. Один раз аккуратно организовать работу с матрицей сравнения альтернатив по первому критерию на отдельном листе.
2. Скопировать лист в количестве, соответствующем числу критериев. Назвать листы соответственно.
3. Исправить на каждом листе лишь верхнюю диагональную часть матрицы попарных сравнений. Результат сразу будет получен.

# Метод анализа иерархий

**Лекция окончена**

**Спасибо за внимание**

**Вопросы ???**

Материалы лекции размещены по адресу:

**[www.ieml-math.narod.ru/lect/MPUR\\_MAI.pdf](http://www.ieml-math.narod.ru/lect/MPUR_MAI.pdf)**